Учебный предмет – ОУД.07 Математика

Раздел 7. Начала математического анализа.

Тема 7.1 Производная и её применение

Лекция № 36. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл.(2 часа)

План лекции:

1. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
2. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
3. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
4. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
5. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.

Литература:

1. O_2: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0.- *п. 5.1, 5.5 – 5.10, стр.114, 129.*

2. Электронный ресурс: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др.]. – 3-е изд. — М.: Просвещение, 2016. — 463 с.: ил. — ISBN 978-5-09-037071-4.

Планируемые результаты:

- ***Личностные результаты*:**

Л 3. Развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

- ***Метапредметные результаты*:**

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 5. Владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

М 7. Целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира.

- ***Предметные результаты*:**

П 2. Сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.
Основные понятия:
Производной любого *n*-го порядка, или *n*-й производной, называется производная от производной (n – 1)-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ или $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.
Вторая производная от пути по времени имеет ***физический смысл ускорения*** точки при её прямолинейном и неравномерном движении. Если же точка движется равномерно, т. е. с постоянной скоростью $V(t)$ = const, то $W(t) = (\text{const})' = 0$.
Возрастание функции. Функция называется возрастающей на интервале (a, b), принадлежащем области определения функции, если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют большие значения функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.
Убывание функции. Функция называется убывающей на интервале (a, b), если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют меньшие значения функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.
Точки экстремума - объединяющий термин для точек максимума и минимума, а значения функций в этих точках называются экстремумами функции.
Функция $f(x)$ **имеет минимум** в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$.
Функция $f(x)$ **имеет максимум** в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$.
Вторая производная. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке (x_0), то её производная называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке (x_0), и обозначается $f''(x_0)$.
Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке (x_0, $f(x_0)$), $x_0 \in (a, b)$.
Функция $f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке (x_0, $f(x_0)$), $x_0 \in (a, b)$.

Проверка теоретического материала по теме «Производная» в форме фронтального опроса по вопросам.

Вопросы по теме «Производная».

1. Что называется приращением аргумента, приращением функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной функции. Уравнение касательной к графику функции.
3. В чем состоит механический смысл производной функции.
4. Дайте определение производной функции f(x) в точке x_0
5. Основные формулы дифференцирования.

1. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.

Пусть функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) имеет производную $y' = f'(x)$, которая также является функцией от x. Назовём её *производной первого порядка*.
Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная называется *производной второго порядка* и обозначается символами $(y')' = y'' = y^{(2)}$ или $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$.
Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается $(y'')' = \left(y^{(2)}\right)' = y''' = y^{(3)}$ или $\frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$.
Производной любого n-го порядка, или n-й производной, называется производная от производной (n – 1)-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ **или** $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$**.**
Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.
Рассмотрим **физический смысл производной второго порядка**. Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = S(t)$ со скоростью $V(t) = S'(t)$, где t – время движения, $S(t)$ – путь, пройденный за время t. Тогда за время Δt скорость $V(t)$ получит приращение $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$. Отношение $W_{\text{ср.}}(\Delta t) = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ называется *средним ускорением* движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *ускорением* точки M в данный момент времени t и обозначается $W(t)$:

$$W(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t) = \left(S'(t)\right)' = S''(t).$$

Таким образом, вторая производная от пути по времени имеет *физический смысл ускорения* точки при её прямолинейном и неравномерном движении. Если же точка движется равномерно, т. е. с постоянной скоростью $V(t)$ = const, то $W(t) = (\text{const})' = 0$.
Пример 1. Вычислить производные первого и второго порядка для данных функций $f(x) = 3x^2 - x^4 + 3\cos x - 2\sin x + 2x + 5$, найти $f'(x)$ и $f''(x)$.
Решение: вычислим производную первого порядка –

$$f'(x) = (3x^2 - x^4 + 3\cos x - 2\sin x + 2x + 5)' = 3(x^2)' - (x^4)' + 3(\cos x)' - 2(\sin x)' + 2(x)' + (5)' =$$
$$= 3\cdot 2x - 4x^3 + 3(-\sin x) - 2\cos x + 2\cdot 1 + 0 = 6x - 4x^3 - 3\sin x - 2\cos x + 2;$$

вычислим вторую производную – это производная от первой производной –

$$f''(x) = (6x - 4x^3 - 3\sin x - 2\cos x + 2)' = 6(x)' - 4(x^3)' - 3(\sin x)' - 2(\cos x)' + (2)' =$$
$$= 6\cdot 1 - 4\cdot 3x^2 - 3\cos x - 2(-\sin x) + 0 = 6 - 12x^2 - 3\cos x + 2\sin x.$$

Ответ: $f'(x) = 6x - 4x^3 - 3\sin x - 2\cos x + 2$ и $f''(x) = 6 - 12x^2 - 3\cos x + 2\sin x$.

2. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.

Исследование функции на возрастание и убывание может быть как самостоятельной задачей, так и одним из этапов полного исследования функции и построения её графика.
Функции, у которых имеет место убывание или возрастание на некотором числовом промежутке, называются монотонными функциями.
Возрастание функции. Функция называется возрастающей на интервале (a, b), принадлежащем области определения функции, если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют большие значения функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.

Убывание функции. Функция называется убывающей на интервале (a, b), если большим значениям независимой переменной из этого интервала соответствуют меньшие значения функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ для всех x_1 и x_2, принадлежащих интервалу.

Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Теорема 1. Если во всех точках некоторого промежутка $f'(x)=0$, то функция $f(x)$ сохраняет в этом промежутке постоянное значение.

Этот промежуток может быть замкнутым или открытым, конечным или бесконечным.

Теорема 2 (достаточный признак возрастания). Если во всех точках некоторого промежутка $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает в этом промежутке.

Теорема 3 (достаточный признак убывания). Если во всех точках некоторого промежутка $f'(x)<0$, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Замечание. Условия теорем 2 и 3 не являются в полной мере необходимыми. Их можно несколько ослабить, а именно считать, что $f'(x)\geq 0$ или $f'(x)\leq 0$, так как заключения теорем остаются справедливыми и тогда, когда производная обращается в нуль в конечном множестве точек.

Алгоритм исследования функции на возрастание (убывание) функции.

1. Найти область определения функции Д (f).
2. Найти производную $f'(x)$
3. Найти промежутки, в которых производная больше нуля, т.е. $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
3. Исследовать знак производной в полученных промежутках, т.е. если $f'(x) > 0$, то функция возрастает и если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

Пример 2: Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Решение: Находим по алгоритму:

1. Д (f) = R
2. $f'(x) = -2x + 2$
3. $f'(x) > 0$, если $-2x + 2 > 0$, $-2x > -2$, $x < 1$

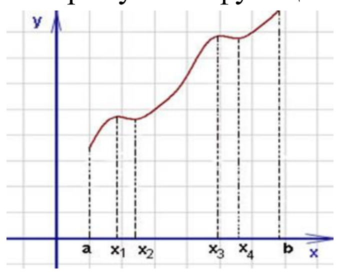
$f'(x) < 0$, если $-2x + 2 < 0$, $-2x < -2$, $x > 1$

Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$; убывает на промежутке $[1; .+\infty)$.

3. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.

Нахождение экстремумов функции может быть как самостоятельной задачей, так и одним из этапов полного исследования функции и построения её графиков.

Точки экстремума - объединяющий термин для точек максимума и минимума, а значения функций в этих точках называются экстремумами функции.



Рассмотрим график непрерывной функции. Из рисунка видно, что значение функции в точке x_2 меньше, чем значения функции в достаточно близких к ней точках, соседних с ней справа и слева. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум.

В точке x_1 значение функции больше значений функции в достаточно близких к ней точках, расположенных справа и слева от неё. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум.

Функция $f(x)$ **имеет минимум** в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$.

Функция $f(x)$ **имеет максимум** в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$.

Из приведённых определений следует, что экстремум функции имеет локальный характер - это наибольшее и наименьшее значение функции по сравнению с близ лежащими значениями. На промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причём может оказаться, что какой-либо минимум функции больше какого-либо максимума. Так, для функции изображённой на рисунке в начале, $f(x_4) > f(x_1)$. Следующая теорема позволяет ответить на вопрос, в каких точках функция может достигать экстремума.

Теорема Ферма (необходимый признак экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная при $x=x_0$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет простое геометрическое истолкование. Так как производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, то равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$ означает, что $\alpha=0$, т. е. касательная к кривой в этой точке параллельна оси *Ox*.

Те значения аргумента, при которых функция сохраняет непрерывность, а её производная обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками** (или критическими значениями аргумента).

Теорема Ферма является лишь необходимым признаком экстремума, так как **не в каждой критической точке экстремум существует**. Поэтому **нужно располагать достаточными признаками**, позволяющими судить, имеется ли в конкретной критической точке экстремум и какой именно - максимум или минимум.

Первый достаточный признак экстремума. Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$ и в некоторой окрестности этой точки слева и справа от неё производная имеет противоположные знаки, то $f(x_0)$ является экстремумом функции, причём:

1) максимумом, если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$;
1) минимумом, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Если же вблизи точки x_0, слева и справа от неё, производная сохраняет знак, то это означает, что функция либо только убывает, либо только возрастает в некоторой окрестности точки x_0. В этом случае в точке x_0 экстремума нет.

Таким образом, если x_0 - критическая точка $f(x)$ и при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то есть x_0 точка экстремума, причём точка максимума, если производная меняет знак с плюса на минус, и точка минимума, если с минуса на плюс. В противном случае в точке x_0 экстремума нет.

Второй достаточный признак экстремума. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема и в точке x_0 выполняются условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то в этой точке функция имеет экстремум, причём максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Замечание 1. Если в точке x_0 обращаются в нуль обе производные, то в этой точке нельзя судить о наличии экстремума на основании второго достаточного признака. В этом случае нужно воспользоваться первым достаточным признаком экстремума.
Замечание 2. Второй достаточный признак экстремума неприменим и тогда, когда в критической точке первая производная не существует (тогда не существует и вторая производная). В этом случае также нужно воспользоваться первым достаточным признаком экстремума.

Алгоритм исследования функции на максимум (минимум) с помощью производной.

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную $f'(x)$
3. Найти точки, в которых производная равна нулю т.е. $f'(x)=0$
4. Найти точки, в которых производная не существует.
5. Исследовать знак производной в промежутках, на которые делят точки, найденные в 3 пункте. Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума. Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Пример 3: Найдите критические точки функции $f(x) = 5+12x - x^3$. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие - точками минимума.
Решение: Находим по алгоритму:
1. $f'(x) = 12 - 3x^2$
2. $12 - 3x^2 = 0$
   $3x^2 = 12$
   $x^2 = 4$
   $x_1 = -2, x_2 = 2$
3. В точке -2 производная меняет знак с минуса на плюс, в точке 2 производная меняет знак с плюса на минус. Значит, точка -2 является точкой минимума, точка 2 является точкой максимума.

4. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).

Вторая производная. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке (x_0), то её производная называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке (x_0), и обозначается $f''(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Функция $f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a, b), тогда:

если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является ***вогнутой*** на интервале (a,b);

если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является ***выпуклой*** на интервале (a,b).

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

Алгоритм нахождения промежутков выпуклости (вогнутости) функции.

1. Найти первую производную $f'(x)$
2. Найти вторую производную $f''(x)$

3. Найти промежутки, в которых производная $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$

4. Исследовать знак производной в полученных промежутках т.е. если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

Пример 4: Найдите промежутки выпуклости кривой $y = x^3$

Решение: Находим по алгоритму:

1. $f'(x) = 3x^2$
2. $f''(x) = 6x$
3. $f''(x) > 0$ в промежутке $(0; \infty)$ и $f''(x) < 0$ в промежутке $(-\infty; 0)$
4. В промежутке $(-\infty; 0)$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $(0; \infty)$ кривая выпукла вниз.

5. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.

Определение. Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут служить только критические точки 2 рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$

Алгоритм нахождения точек перегиба графика функции y=f (x)

1. Найти вторую производную $f''(x)$
2. Найти критические точки 2 рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в про межутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$.

Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.

4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 5: Найти точки перегиба кривой $f(x)=6x^2 - x^3$

Решение: Находим по алгоритму:

1. $f'(x) = 12x - 3x^2$ $\quad f''(x) = 12 - 6x$
2. $12 - 6x = 0$ $\quad 12 = 6x$ $\quad x = 2$
3. Так как $f''(x) > 0$ в промежутке $(-\infty; 2)$ и $f''(x) < 0$ в промежутке $(2; +\infty)$, то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба.
4. $f(2) = 16$. Итак $(2; 16)$ – точка перегиба.

<u>Решение заданий на закрепление темы.</u>

Учебник O_2 – выполнить № 5.6, 5.10, 5.21, 5.57, 5.64, 5.66, 5.76 – а, в (дополнительно).

<u>Вопросы для закрепления:</u>

1. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
2. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
3. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.

4. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).

5. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.

6. **Подготовить:**

1. Прочитать: O_2: п. 5.1, 5.5 – 5.10*, стр.114, 129*.
2. Выучить лекцию.
3. Выполнить по учебнику O_2: № 5.6 – 5.8 (б), 5.23 (а), 5.58 (а, в), 5.64 (в).

Раздел 7. Начала математического анализа.

Тема 7.1 Производная и её применение

Лекция № 37. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.(2 часа)

План лекции:

6. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции.
7. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значение функции.

Литература:

1. О$_2$: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0.- *п. 5.1, стр. 114*; *п. 5.9 – 5.10, стр.145*.
2. Электронный ресурс: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др.]. – 3-е изд. — М.: Просвещение, 2016. — 463 с.: ил. — ISBN 978-5-09-037071-4.

Планируемые результаты:

- ***Личностные результаты*:**

Л 3. Развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

- ***Метапредметные результаты*:**

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 5. Владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

М 7. Целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира.

- ***Предметные результаты*:**

П 2. Сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

Основные понятия:

Наибольшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\max\limits_{x \in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X, \quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Наименьшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\min\limits_{x \in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X, \quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Эти определения интуитивно понятны: наибольшее (наименьшее) значение функции – это самое большое (маленькое) принимаемое значение на рассматриваемом интервале при абсциссе x_0.

Стационарные точки – это значения аргумента, при которых производная функции обращается в ноль.

<u>Проверка теоретического материала по теме «Производная» в форме фронтального опроса по вопросам.</u>

Вопросы по теме «Производная».

1. Что называется приращением аргумента, приращением функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной функции. Уравнение касательной к графику функции.
3. В чем состоит механический смысл производной функции.
4. Дайте определение производной функции f(x) в точке x_0
5. Основные формулы дифференцирования.
6. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
7. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
8. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
9. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
10. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.

6. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции.

Наибольшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\max\limits_{x \in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X, \quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Наименьшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\min\limits_{x \in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X, \quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Эти определения интуитивно понятны: наибольшее (наименьшее) значение функции – это самое большое (маленькое) принимаемое значение на рассматриваемом интервале при абсциссе x_0.

Стационарные точки – это значения аргумента, при которых производная функции обращается в ноль.

Для чего нам стационарные точки при нахождении наибольшего и наименьшего значений? Ответ на этот вопрос дает **теорема Ферма**. Из этой теоремы следует, что если дифференцируемая функция имеет экстремум (локальный минимум или локальный максимум) в некоторой точке, то эта точка является стационарной. Таким образом, функция часто принимает свое наибольшее (наименьшее) значение на промежутке *X* в одной из стационарных точек из этого промежутка.

Также часто наибольшее и наименьшее значение функция может принимать в точках, в которых не существует первая производная этой функции, а сама функция определена.

Сразу ответим на один из самых распространенных вопросов по этой теме: "Всегда ли можно определить наибольшее (наименьшее) значение функции"? Нет, не всегда. Иногда границы промежутка X совпадают с границами области определения функции или интервал X бесконечен. А некоторые функции на бесконечности и на границах области определения могут принимать как бесконечно большие так и бесконечно малые значения. В этих случаях ничего нельзя сказать о наибольшем и наименьшем значении функции.

Для наглядности дадим графическую иллюстрацию. Посмотрите на рисунки – и многое прояснится.

На отрезке

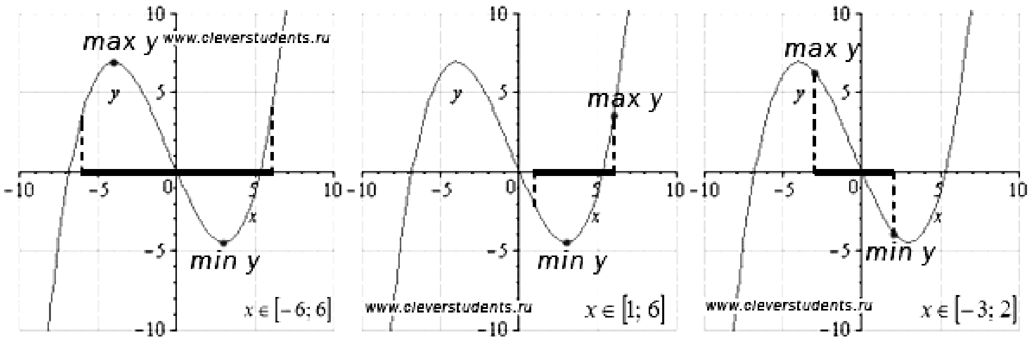


рисунок №1 рисунок №2 рисунок №3

На первом рисунке функция принимает наибольшее ($max\ y$) и наименьшее ($min\ y$) значения в стационарных точках, находящихся внутри отрезка *[-6;6]*.

Рассмотрим случай, изображенный на втором рисунке. Изменим отрезок на *[1;6]*. В этом примере наименьшее значение функции достигается в стационарной точке, а наибольшее - в точке с абсциссой, соответствующей правой границе интервала.

На рисунке №3 граничные точки отрезка *[-3;2]* являются абсциссами точек, соответствующих наибольшему и наименьшему значению функции.

На открытом интервале

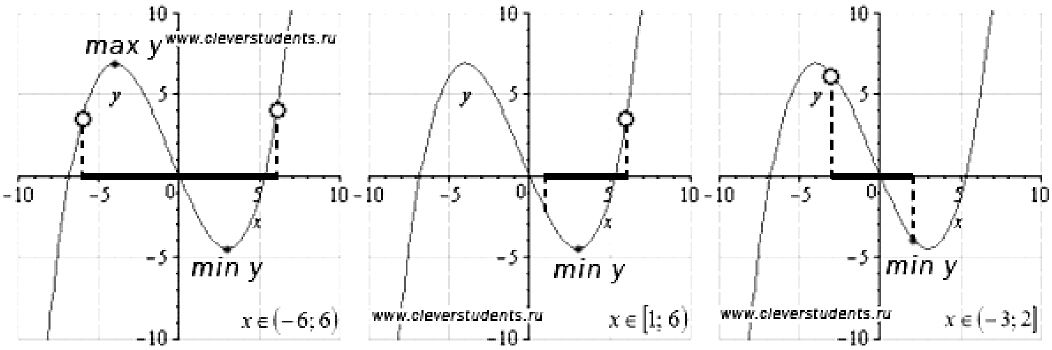


рисунок №4 рисунок №5 рисунок №6

На четвертом рисунке функция принимает наибольшее ($max\ y$) и наименьшее ($min\ y$) значения в стационарных точках, находящихся внутри открытого интервала *(-6;6)*.

На интервале *[1;6)* наименьшее значение функции достигается в стационарной точке, а про наибольшее значение мы ничего сказать не можем. Если бы точка $x=6$была частью интервала, тогда при этом значении функция принимала бы наибольшее значение. Этот пример изображен на рисунке №5.

На рисунке №6 наименьшее значение функции достигается в правой границе интервала *(-3;2]*, о наибольшем значении никаких выводов сделать нельзя.

На бесконечности

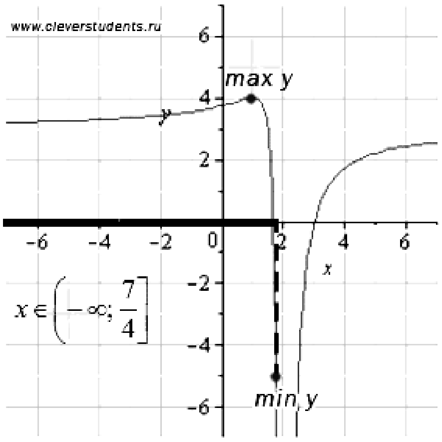


рисунок №7

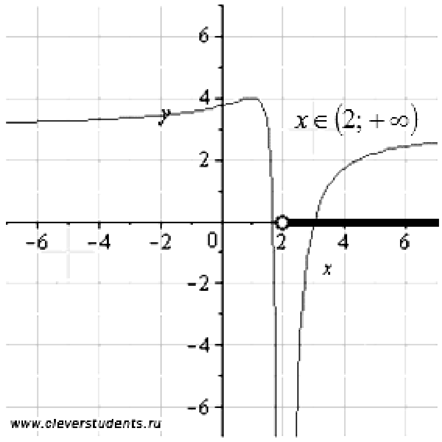


рисунок №8

В примере, представленном на седьмом рисунке, функция принимает наибольшее значение ($max\ y$) в стационарной точке с абсциссой $x=1$, а наименьшее значение ($min\ y$) достигается на правой границе интервала. На минус бесконечности значения функции асимптотически приближаются к $y=3$.

На интервале $x \in (2; +\infty)$ функция не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значения. При стремлении к $x=2$ справа значения функции стремятся к минус бесконечности (прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой), а при стремлении абсциссы к плюс бесконечности, значения функции асимптотически приближаются к $y=3$. Графическая иллюстрация этого примера приведена на рисунке №8.

2. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значение функции.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке [a;b].

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок $[a;b]$.
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке $[a;b]$ (обычно такие точки встечаются у функций с аргументом под знаком модуля и у степенных функций с дробно-рациональным показателем). Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок $[a;b]$. Для этого, находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в отрезок, то переходим к следующему пункту.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при $x=a$ и $x=b$.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее - они и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции соответственно.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

- на отрезке *[1;4]*;
- на отрезке *[-4;-1]*.

Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть $D(y):\quad x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по правилу дифференцирования дроби:

$$y'=\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)'=\frac{(x^3+4)'\cdot x^2-(x^3+4)\cdot(x^2)'}{x^4}=\frac{3x^2\cdot x^2-(x^3+4)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков *[1;4]* и *[-4;-1]*.

Стационарные точки определим из уравнения $\frac{x^3-8}{x^3}=0$. Единственным действительным корнем является *x=2*. Эта стационарная точка попадает в первый отрезок *[1;4]*.

Для первого случая вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при *x=1*, *x=2* и *x=4*:

$$y(1)=\frac{1^3+4}{1^2}=5 \qquad y(2)=\frac{2^3+4}{2^2}=3 \qquad y(4)=\frac{4^3+4}{4^2}=4\frac{1}{4}$$

Следовательно, наибольшее значение функции $\max\limits_{x\in[1;4]} y=y(1)=5$ достигается при *x=1*, а наименьшее значение $\min\limits_{x\in[1;4]} y=y(2)=3$ – при *x=2*.

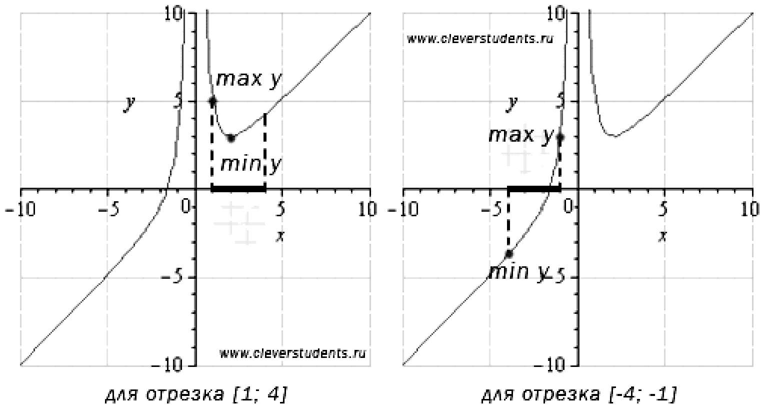
Для второго случая вычисляем значения функции лишь на концах отрезка *[-4;-1]* (так как он не содержит ни одной стационарной точки):

$$y(-4)=\frac{(-4)^3+4}{(-4)^2}=-3\frac{3}{4}$$

$$y(-1)=\frac{(-1)^3+4}{(-1)^2}=3$$

Следовательно, $\max\limits_{x\in[-4;-1]} y=y(-1)=3,\quad \min\limits_{x\in[-4;-1]} y=y(-4)=-3\frac{3}{4}$.

Графическая иллюстрация.



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на открытом или бесконечном интервале *X*.

Прежде чем ознакомиться с алгоритмом нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на открытом или бесконечном интервале рекомендуем повторить определения одностороннего предела и предела на бесконечности, а также способы нахождения пределов.

1. Проверяем, является ли интервал *X* подмножеством области определения функции.
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в интервале *X* (обычно такие точки встречаются у функций с аргументом под знаком модуля и у степенных функций с дробно-рациональным показателем). Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в промежуток *X*. Для этого приравниваем производную функции к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в интервал, то переходим к следующему пункту.
4. Вычисляем значения функции в стационарных точках и точках, в которых не существует первая производная функции (если такие точки есть).

Дальнейшие действия зависят от интервала *X*. Если интервал *X* имеет вид:

- $[a;b)$, то вычисляем значение функции в точке $x=a$ и односторонний предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$;
- $(a;b]$, то вычисляем значение функции в точке $x=b$ и односторонний предел $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;
- $(a;b)$, то вычисляем односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$;
- $[a;+\infty)$, то вычисляем значение функции в точке $x=a$ и предел на плюс бесконечности $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
- $(a;+\infty)$, то вычисляем односторонний предел $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и предел на плюс бесконечности $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
- $(-\infty;b]$, то вычисляем значение функции в точке $x=b$ и предел на минус бесконечности $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
- $(-\infty;b)$, то вычисляем односторонний предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и предел на минус бесконечности $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
- $(-\infty;+\infty)$, то вычисляем пределы на плюс и минус бесконечности $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5. Делаем выводы, отталкиваясь от полученных значений функции и пределов. Здесь может быть масса вариантов. К примеру, если односторонний предел равен минус бесконечности (плюс бесконечности), то о наименьшем (наибольшем) значении функции ничего сказать нельзя для данного интервала. Ниже разобраны несколько типичных примеров.

Пример 2.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3e^{\frac{1}{x^2+x-6}} - 4$ на интервалах:

1. $(-\infty;-4]$
2. $(-\infty;-3)$
3. *(-3;1]*
4. *(-3;2)*

5. *[1;2)*
6. $(2;+\infty)$

Решение.

Начнем с области определения функции. Квадратный трехчлен в знаменателе дроби не должен обращаться в ноль:

$$x^2+x-6=0$$

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25$$

$$x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-1+5}{2}=2 \quad \Rightarrow$$

$$D(y):\quad x\in(-\infty;-3)\cup(-3;2)\cup(2;+\infty)$$

Легко проверить, что все интервалы из условия задачи принадлежат области определения функции.

Продифференцируем функцию:

$$y'=\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)'=3\cdot\left(e^{\frac{1}{x^2+x-6}}\right)'=3\cdot e^{\frac{1}{x^2+x-6}}\cdot\left(\frac{1}{x^2+x-6}\right)'=$$

$$=3\cdot e^{\frac{1}{x^2+x-6}}\cdot\frac{1'\cdot(x^2+x-6)-1\cdot(x^2+x-6)'}{(x^2+x-6)^2}=-\frac{3\cdot(2x+1)\cdot e^{\frac{1}{x^2+x-6}}}{(x^2+x-6)^2}$$

Очевидно, производная существует на всей области определения функции.

Найдем стационарные точки. Производная обращается в ноль при $x=-\frac{1}{2}$. Эта стационарная точка попадает в интервалы *(-3;1]* и *(-3;2)*.

1. Для первого промежутка $(-\infty;-4]$ вычисляем значение функции при *x=-4* и предел на минус бесконечности:

$$y(-4)=3e^{\frac{1}{(-4)^2+(-4)-6}}-4=3e^{\frac{1}{6}}-4\approx-0.456$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=3e^0-4=-1$$

Так как $3e^{\frac{1}{6}}-4>-1$, то $\max\limits_{x\in(-\infty;-4]}y=y(-4)=3e^{\frac{1}{6}}-4$, а о наименьшем значении функции выводов сделать нельзя. Можно лишь утверждать, что значения функции ограничены снизу значением *-1* (на минус бесконечности значения функции асимптотически приближаются к прямой *y=-1*).

2. Второй интервал $(-\infty;-3)$ интересен тем, что не содержит ни одной стационарной точки и ни одна из его границ не является строгой. В этом случае мы не сможем найти ни наибольшего, ни наименьшего значения функции. Вычислив предел на минус бесконечности и при стремлении аргумента к минус трем слева, мы лишь сможем определить интервал значений функции:

$$\lim_{x\to-3-0}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=\lim_{x\to-3-0}\left(3e^{\frac{1}{(x+3)(x-2)}}-4\right)=3e^{\frac{1}{(-3-0+3)(-3-0-2)}}-4=$$

$$=3e^{\frac{1}{(+0)}}-4=3e^{+\infty}-4=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=3e^0-4=-1$$

Следовательно, значения функции находятся в интервале $(-1;+\infty)$ при *x* из промежутка $(-\infty;-3)$.

3. Для третьего промежутка *(-3;1]* вычислим значение функции в стационарной точке $x=-\frac{1}{2}$ и при *x=1*, а также односторонний предел, при стремлении аргумента к *-3* справа:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=3e^{\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-6}}-4=3e^{-\frac{4}{25}}-4\approx-1.444$$

$$y(1)=3e^{\frac{1}{1^2-1-6}}-4=3e^{-\frac{1}{4}}-4\approx-1.664$$

$$\lim_{x\to -3-0}\left(3e^{\frac{1}{x^2-x-6}}-4\right)=\lim_{x\to -3-0}\left(3e^{\frac{1}{(x+3)(x-2)}}-4\right)=3e^{\frac{1}{(-3-0-3)(-3-0-2)}}-4=$$

$$=3e^{\frac{1}{(-0)}}-4=3e^{-\infty}-4=3\cdot 0-4=-4$$

Следовательно, наибольшее значение на этом интервале функция принимает в стационарной точке $\max\limits_{x\in(3;1]} y=y\left(-\frac{1}{2}\right)=3e^{-\frac{4}{25}}-4$, наименьшее значение функции мы вычислить не можем, но значения функции ограничены снизу величиной *-4.*

4. Для интервала *(-3;2)* воспользуемся результатами из предыдущего пункта и еще вычислим односторонний предел при стремлении к двойке слева:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=3e^{\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-6}}-4=3e^{-\frac{4}{25}}-4\approx-1$$

$$\lim_{x\to -3+0}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=-4$$

$$\lim_{x\to 2-0}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=\lim_{x\to -3+0}\left(3e^{\frac{1}{(x+3)(x-2)}}-4\right) \quad 3e^{\frac{1}{(-0)}}-4=3e^{-\infty}-4=3\cdot 0-4=-4$$

Поэтому $\max\limits_{x\in(-3;2)} y=y\left(-\frac{1}{2}\right)=3e^{-\frac{4}{25}}-4$, наименьшее значение определить нет возможности, значения функции ограничены снизу величиной *-4.*

5. Результаты предыдущих двух пунктов позволяют утверждать, что на интервале *[1;2)* наибольшее значение $\max\limits_{x\in[1;2)} y=y(1)=3e^{-\frac{1}{4}}-4$ функция принимает при *x=1*, наименьшее значение найти нельзя, значения функции ограничены снизу величиной *-4.*

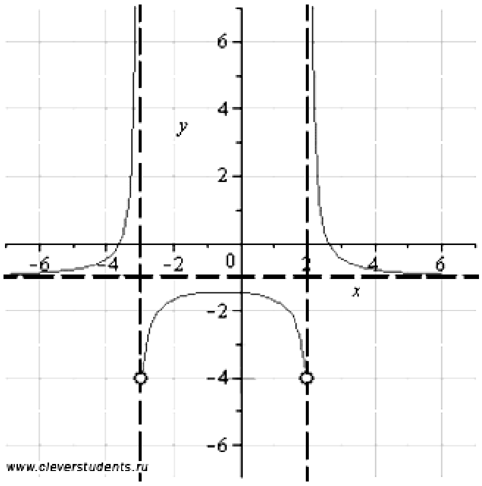
6. На промежутке $(2;+\infty)$ функция не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

$$\lim_{x\to 2+0}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}}-4\right)=\lim_{x\to -3+0}\left(3e^{\frac{1}{(x+3)(x-2)}}-4\right)=3e^{\frac{1}{(2+0+3)(2+0-2)}}-4=$$

$$= 3e^{\frac{1}{(+0)}} - 4 = 3e^{+\infty} - 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(3e^{\frac{1}{x^2+x-6}} - 4\right) = 3e^0 - 4 = -1$$

То есть, на этом интервале функция принимает значения из промежутка $(-1; +\infty)$.
А теперь можно сопоставить полученные в каждом пункте результаты с графиком функции. Пунктирными линиями обозначены асимптоты.



Решение заданий на закрепление темы.

Учебник O_2 – выполнить № 5.57 - в, 5.76 – в; 5.91 – 5.100.

Вопросы для закрепления:

7. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
8. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
9. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
10. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
11. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.
12. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции. Признаки наибольшего (наименьшего) значения функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значение функции.

13. Подготовить:

4. Прочитать: O_2: п. 5.1, 5.9 – 5.10, *стр.114, 145*.
5. Выучить лекцию.
6. Выполнить по учебнику O_2: № 5.91 – 5.100.

Раздел 7. Начала математического анализа.

Тема 7.1 Производная и её применение

Лекция № 38. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.(2 часа).

План лекции:

8. Общая схема исследования функции при помощи производной.

Литература:

1. O_2: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0.- *п. 5.11, стр.156.*
2. Электронный ресурс: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др.]. – 3-е изд. — М.: Просвещение, 2016. — 463 с.: ил. — ISBN 978-5-09-037071-4.

Планируемые результаты:

- ***Личностные результаты*:**

Л 3. Развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

- ***Метапредметные результаты*:**

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 5. Владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

М 7. Целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира.

- ***Предметные результаты*:**

П 2. Сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

Основные понятия:

При исследовании функций и построении их графиков целесообразно пользоваться следующей схемой.

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование функции на четность и нечетность.

3. Установление области непрерывности функции и точек разрыва. Отыскание вертикальных асимптот.
4. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$ (если она там определена). Отыскание горизонтальных и наклонных асимптот.
5. Нахождение экстремумов и интервалов монотонности функции. Составление таблицы.
6. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.
7. Нахождение точек пересечения графика функции с осями, интервалов знакопостоянства функции. Составление таблицы. Отыскание дополнительных точек для построения графика.
8. Построение графика функции.

1. Общая схема исследования функции при помощи производной.

При исследовании функций и построении их графиков целесообразно пользоваться следующей схемой.
1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование функции на четность и нечетность.
3. Установление области непрерывности функции и точек разрыва. Отыскание вертикальных асимптот.
4. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$ (если она там определена). Отыскание горизонтальных и наклонных асимптот.
5. Нахождение экстремумов и интервалов монотонности функции. Составление таблицы.
6. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.
7. Нахождение точек пересечения графика функции с осями, интервалов знакопостоянства функции. Составление таблицы. Отыскание дополнительных точек для построения графика.
8. Построение графика функции.

Пример 1. Исследуйте функцию $y = \dfrac{e^x}{x}$ и постройте ее график.
Решение.
1. Область определения функции $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
2. $y(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} = -\dfrac{1}{xe^x}$, $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$. Следовательно, данная функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция непрерывна в области определения, как частное двух непрерывных функций. Исследуем точку $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Поэтому $x = 0$ - точка разрыва функции с бесконечным скачком, а прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота графика функции.
4. Вычислим пределы $y(x)$ при $x \to \pm\infty$.

Так как $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, то $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x \cdot \dfrac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$. Следовательно, прямая $y = 0$ - левосторонняя горизонтальная асимптота графика.

С другой стороны, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$.
Правосторонней горизонтальной асимптоты не существует.
Будем искать правостороннюю наклонную асимптоту.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = +\infty$, так как уже был вычислен $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
При $x \to +\infty$ нет асимптоты ни горизонтальной, ни наклонной.

5. Находим $y' = \dfrac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x}{x^2}(x-1)$.

Производная равна нулю в точке $x = 1$.
Составляем таблицу.

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	-	-	0	+
y	убывает	убывает	e	возрастает
			min	

$y(1) = \dfrac{e}{1} = e$.

6. Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(e^x(x-1)x^{-2}\right)' = \left(e^x\right)' \cdot (x-1)x^{-2} + e^x(x-1)' \cdot x^{-2} + e^x(x-1)\left(x^{-2}\right)' =$$
$$= e^x(x-1)x^{-2} + e^x \cdot 1 \cdot x^{-2} + e^x(x-1)\left(-2x^{-3}\right) = e^x x^{-3}\left(x(x-1) + x - 2(x-1)\right) =$$
$$= \frac{e^x}{x^3}\left(x^2 - x + x - 2x + 2\right) = \frac{e^x}{x^3}\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

y'' не обращается в нуль ни в одной точке, так как $e^x > 0$, $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ при всех x. Но y'' не существует в точке $x = 0$.

Составляем таблицу.

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y''	-	+
График	выпуклый	вогнутый

7. Точка $x = 0$ не входит в область определения. Поэтому график не пересекает ось OY. Уравнение $y = 0$ не имеет решений, так как $e^x > 0$ при всех x. Следовательно, ось OX график тоже не пересекает. Функция отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$.
Найдем несколько дополнительных точек для построения графика.

x	-3	-2	-1	2	3	0,5	-0,5
y	-0,02	-0,07	-0,37	3,69	6,66	-1,21	3,30

$y(-3) = \dfrac{e^{-3}}{-3} = -\dfrac{1}{3e^3} \approx -0{,}02$,

$y(-2) = \dfrac{e^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2e^2} \approx -0{,}07$,

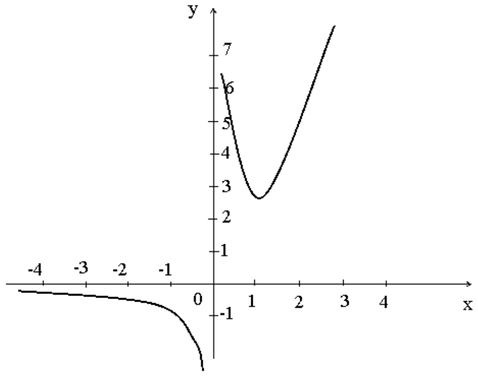
$y(-1) = \dfrac{e^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37$,

$y(3) = \dfrac{e^3}{3} \approx 6{,}66$,

$y(-0{,}5) = \dfrac{e^{-0{,}5}}{-0{,}5} = -\dfrac{2}{\sqrt{e}} \approx -1{,}21$,

$y(0{,}5) = 2\sqrt{e} \approx 3{,}30$.

$y(2) = \dfrac{e^2}{2} \approx 3{,}69$,



Вопросы для закрепления:

14. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка. Физический (механический) смысл производной второго порядка.

15. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.

16. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.

17. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).

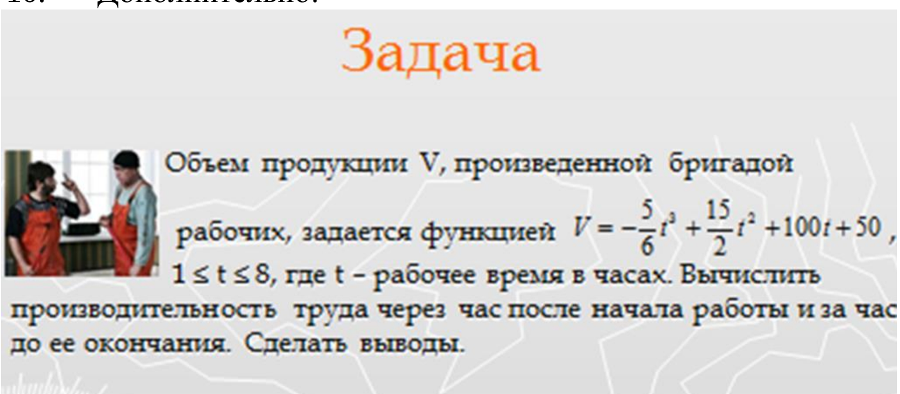
18. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.

19. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значение функции.

20. Общая схема исследования функции с помощью производной.

21. Подготовить:

7. Прочитать: O_2: п. 5.11, *156*.
8. Выучить лекцию.
9. Выполнить по учебнику O_2: № 5.114(а, б), № 5.115(а, б).
10. Дополнительно:



ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 26

Тема: «Нахождение производных функций, используя правила дифференцирования. Составление уравнения касательной к графику функции». (2 часа)

Тема 7.1 Производная и её применение.

Цель занятия: формировать умения и навыки обучающихся по вычислению производных функций с помощью правил дифференцирования и производных элементарных функций, вычисление углового коэффициента касательной к графику функций, вычисление уравнения касательной к графику функций, решение задач с помощью физического и геометрического смысла производной.. Овладеть учебно-познавательными компетенциями (умение планировать, анализировать, самостоятельно добывать знания) и коммуникативными компетенциями (умение ясно и четко излагать мысли, убеждать, аргументировать, строить доказательства, анализировать, высказывать суждения, передавать рациональную и эмоциональную информацию, устанавливать межличностные связи, согласовывать свои действия с действиями сверстников, работать в коллективе, отстаивать, цивилизованными способами свою точку зрения, слушать и слышать других, организовывать и поддерживать диалог) для владения умениями описания свойств различных процессов и явлений математического характера.

Сформированные способности: Л4, Л5, Л7; М1, М2, М3; П3, П5.

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

М 1. Умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 3. Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Сдать теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».
2. Оформить задания в тетради для практических работ.
3. Выполнить задания из учебника совместно с преподавателем.
4. Выполнить индивидуальное задание по варианту в тетради для практических работ.
5. Ответить на контрольные теоретические вопросы.

I. Теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».

Обучающиеся отвечают на вопросы в письменной (устной) форме.

Вопросы обучающимся:

1. Понятие производной и ее применение. Физический или механический смысл производной.
2. Основные теоремы дифференцирования (теорема суммы, разности, произведения и частного).
3. Таблица производных элементарных функций.
4. Понятие композиции функции. Производная сложной функции.
5. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
6. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка.
7. Физический (механический) смысл производной второго порядка.

II. Выполнение заданий из учебника совместно с преподавателем.

Выполнить задания из учебника O_2 - № 4.11, 4.13, 4.19 - 4.21 (а), 4.30 (в), 4.34 (в), 4.39 (а), 4.53 (а), 4.57 (в), 4.63 (в), 5.21 (а).

III. Индивидуальное задание по вариантам.

Выполнение индивидуального задания «*Нахождение производных функций, используя правила дифференцирования. Составление уравнения касательной к графику функции*» по вариантам согласно номеру в журнале.

1. Вычисление производных элементарных функций.

Вариант 1.

1. Найдите производные элементарных функций: а) $y=\sqrt{3}$; б) $y=x+3$; в) $y=3x$;

г) $y=\sqrt{2}-x$; д) $y=x^{\frac{7}{5}}-x+e^{x}$; е) $y=\cos x+3\sin x$; ж) $y=3x^3+4x^2+2$; и) $y=x^2\cdot\ln x$;

к) $y=x^{103}$; л) $y=52x$; м) $y=\ln x-\cos x$; н) $y=4^x+8^x-16^x$; о) $y=\frac{x^2+3x}{x+1}$; п) $y=(x^2+3x)(x-1)$.

2. Найдите значения производной функции в указанной точке: $f'(2)$, если $f(x)=x^3-4x^2+3x-11$

Вариант 2.

1. Найти производные элементарных функций

а) $y = \sqrt{7}$; б) $y = 2x + 5$; в) y = 6x; г) $y = \sqrt{3} - x$; д) $y = x^{\frac{5}{3}} - 2x + e^x$; е) $y = 2\cos x + \sin x$;
ж) $y = 5x^3 + 4x^2 - 2$; з) $y = 0{,}5x^2 - \frac{3}{4}x^4 - 2x + 9$; и) $y = x^3 \ln x$; к) $y=x^{108}$; л) $y=35x^{2}$;
м) $y = \cos x - \ln x$; н) $y = 2^x + 4^x - 8^x$; о) $y = \frac{x^2+x-7}{x^2+1}$; п) $y=(x^2-8x)(x-2)$.

2. Найти значения производной функции в указанной точке: f ’(1), если $f(x)= 3x^3-8x^2+3x-11$

2. Уравнение касательной

Вариант № 1	Вариант № 2
1)Напишите уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.	
а) $f(x) = -x^2 + 6x + 8$, $x_0 = -2$	а) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$, $x_0 = -1$
2) Найдите уравнение касательной к графику функции	
$f(x) = x^2 - 4x + 5$	$f(x) = x^2 + 3x + 5$

если эта касательная проходит через точку (0; 4) [(0; 1)] и абсцисса точки касания положительна [отрицательна].

3) Какой угол (острый, прямой или тупой) образует с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции в точках – 1; 0; 1?

$y = x^3 - x^2$	$y = x^2 - x^3$

4) В какой точке касательная к графику функции $y = -x^2 + 4x - 3$ параллельна оси абсцисс?

4) В какой точке касательная к графику функции $y = 0{,}5x^2 + 1$ параллельна прямой $y = -x - 1$?

5) Найдите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x+1}$, если эта касательная проходит через точку (– 0,5; 0)

Вопросы для закрепления.

1. Алгоритм вычисления производной в точке.
2. Алгоритм вычисления производной второго, третьего и т.д. порядков.
3. Нахождение производной сложной функции.
4. Алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции.
5. **Подготовить:**
   11. Повторить: O_2 - *п. 4.1- 4.7 - стр. 89*; *п. 5.2 - стр. 121.*
   12. Выполнить: завершить выполнение практического занятия.

Литература:

- основные O_2: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0. - *п. 4.1- 4.7 - стр. 89*; *п. 5.2 - стр. 121.*

- дополнительные Электронный ресурс: Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И.Башмаков. – 10-е изд., стер. — М. Издательский центр «Академия», 2015. – 256 с. ISBN 978-5-4468-2339-0.
раздаточный материал.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 27

Тема: «Исследование функций с помощью производной и построение их графиков». (2 часа)

Тема 7.1 Производная и её применение.

Цель занятия: формировать умения обучающихся применять полученные знания к вычислению производных, научится исследовать функции на возрастание (убывание), максимум (минимум), наибольшее (наименьшее) значения функции с помощью производной, формировать умения обучающихся исследовать функции по общей схеме и строить их графики. Овладеть учебно-познавательными компетенциями (умение планировать, анализировать, самостоятельно добывать знания) и коммуникативными компетенциями (умение ясно и четко излагать мысли, убеждать, аргументировать, строить доказательства, анализировать, высказывать суждения, передавать рациональную и эмоциональную информацию, устанавливать межличностные связи, согласовывать свои действия с действиями сверстников, работать в коллективе, отстаивать, цивилизованными способами свою точку зрения, слушать и слышать других, организовывать и поддерживать диалог) для владения умениями описания свойств различных процессов и явлений математического характера.

Сформированные способности: Л4, Л5, Л7; М1, М2, М3; П3, П5.

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

М 1. Умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 3. Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Сдать теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».
2. Оформить задания в тетради для практических работ.
3. Выполнить самостоятельную работу по теме «Производная и ее применение» по вариантам.
4. Выполнить задания из учебника совместно с преподавателем.
5. Выполнить индивидуальное задание по варианту в тетради для практических работ.
6. Ответить на контрольные теоретические вопросы.

I. Теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».

Обучающиеся отвечают на вопросы в письменной (устной) форме.

Вопросы обучающимся:

1. Понятие производной и ее применение. Физический или механический смысл производной.
2. Основные теоремы дифференцирования (теорема суммы, разности, произведения и частного).
3. Таблица производных элементарных функций.
4. Понятие композиции функции. Производная сложной функции.
5. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
6. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка.
7. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
8. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
9. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
10. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
11. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.
12. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции. Признаки наибольшего (наименьшего) значения функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значения функции.
13. Общая схема исследования функции при помощи производной.

II. Выполнение заданий из учебника совместно с преподавателем.

Выполнить задания из учебника O_2 - № 5.6 (в), 5.10 (в), 5.13 (а), 5.57 (б).

III. Выполнить самостоятельную работу по теме «Производная и ее применение» по вариантам.

Самостоятельная работа № 6 «Производная и ее применение».

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
1.Найдите производную функции: $f(x) = 3x^7 - 6x^5 - 4x^2 + 17$ $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x_0: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$, $x_0 = -1$ $f(x) = \frac{8}{x^2} - \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$: $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ 4. Вычислите $f'(x) = 0$: $f(x) = 9x^2 + 72x$	1.Найдите производную функции: $f(x) = 6x^5 - 4x^4 - 3x + 27$ $f(x) = (x^4 - 3)(x^3 + 4)$ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{3 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x_0: $f(x) = x^5 - 3x^4 + x$, $x_0 = -2$ $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{64}{x^3}$ в точке $x_0 = 4$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$: $f(x) = 12x^3 + 2x^4$ 4. Вычислите $f'(x) = 0$: $f(x) = 6x^2 + 32x + 2008$	1.Найдите производную функции: $f(x) = 7x^7 - 3x^5 - 8x + 217$ $f(x) = (x^6 + 13)(x^4 + 1)$ $f(x) = \frac{x^2 - 3}{1 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x_0: $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5x$, $x_0 = -3$ $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{81}{x}$ в точке $x_0 = 9$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$; $f(x) = -24x^2 + 3x^5$ 4. Вычислите $f'(x) = 0$: $f(x) = 15x^2 - 18x + 1171$
Вариант 4	**Вариант 5**	**Вариант 6**
1.Найдите производную функции: f(x) = 3x7 – 6x5 – 4x2 + 17 f(x) = (x3 – 2)(x2 +1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x0: f(x) = x4 – 2x3 + x, x0 = - 1 $f(x) = \frac{8}{x^2} - \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$: f(x) = 2x3 + 12x2 4. Вычислите $f'(x) = 0$: f (x) = 9x2 + 72x	1.Найдите производную функции: $f(x) = 6x^5 - 4x^4 - 3x + 27$ $f(x) = (x^4 - 3)(x^3 + 4)$ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{3 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x_0: $f(x) = x^5 - 3x^4 + x$, $x_0 = -2$ $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{64}{x^3}$ в точке $x_0 = 4$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$: $f(x) = 12x^3 + 2x^4$ 4. Вычислите $f'(x) = 0$: $f(x) = 6x^2 + 32x + 2008$	1.Найдите производную функции: $f(x) = 7x^7 - 3x^5 - 8x + 217$ $f(x) = (x^6 + 13)(x^4 + 1)$ $f(x) = \frac{x^2 - 3}{1 + x}$. 2.Вычислите значение производной данной функции в данной функции в точке x_0: $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5x$, $x_0 = -3$ $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{81}{x}$ в точке $x_0 = 9$. 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$; $f(x) = -24x^2 + 3x^5$ 4. Вычислите $f'(x) = 0$: $f(x) = 15x^2 - 18x + 1171$

IV. Индивидуальное задание по вариантам.

Выполнение индивидуального задания «Исследование функций с помощью производной и построение их графиков» в форме расчетно-графической работы и решения ситуационных задач по вариантам согласно номеру в журнале.

Вариант № 1	Вариант № 2
1) Найти производные функций	
а) $f(x) = 5x^3 - 3x^9$	а) $f(x) = 2x^7 + 3x^3$
б) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x}$	б) $f(x) = 6\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}$
в) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$	в) $f(x) = \frac{1 - 2x + 3x^2}{x}$
г) $f(x) = 1/6\,x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 2$	г) $f(x) = -1/6\,x^3 + 1{,}5x^2 + 5x - 3$
д) $f(x) = x\sqrt{x}$ е) $f(x) = \frac{4 - 3x}{x + 2}$	д) $f(x) = -x\sqrt{x}$ е) $f(x) = \frac{3 + 2x}{x - 5}$
ж) $f(x) = e^{-5x}$ з) $f(x) = x \cdot 2^x$	ж) $f(x) = e^{-0,3x}$ з) $f(x) = x \cdot 3^x$
и) $f(x) = \ln(2x + 1)$ к) $f(x) = 2\sin 3x \cos 3x$	и) $f(x) = \ln(3x - 4)$ к) $f(x) = \cos^2 4x - \sin^2 4x$
л) $f(x) = \log_3(2x^2 - 3x + 1)$	л) $f(x) = \log_{1/2}(3x^2 - 2x + 50)$
м) $f(x) = \cos(5 - 3x)$ н) $f(x) = \mathrm{ctg}(2 - 5x)$	м) $f(x) = \sin(3 - 2x)$ н) $f(x) = \mathrm{tg}(4 - 3x)$
2) Найти значение выражения	
а) $f'(0{,}5)$, если $f(x) = \frac{3}{5 - 4x}$	а) $f'(-0{,}5)$, если $f(x) = \frac{4}{3 + 2x}$
б) $f'(-\pi/4)$, если $f(x) = 3\sin^2 x$	б) $f'(-3\pi/4)$, если $f(x) = 5\cos^2 x$
3) Решите уравнение $y'(x) = 0$, если	
$y = 4x + \frac{8}{x}$	$y = 3x + \frac{9}{x}$
4) Решите неравенство $f'(x) < 0$ [$f'(x) > 0$], если	
$f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)^2$	$f(x) = (4 - x) \cdot (x + 3)^2$

5) Возрастание и убывание функции

Найдите промежутки возрастания (убывания) и точки локального экстремума для функции $y=x^3-6x^2+9x+3$	Найдите промежутки возрастания (убывания) и точки локального экстремума для функции $y=2x^3-3x^2+12x+6$.

6) Задачи на максимум и минимум функции

Число 76 представим виде суммы 3 положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму был равно 2:3	Число 90 представим в виде суммы 3 положительных чисел так, чтобы первое число было в 2 раза больше второго, а произведение всех трех чисел было наибольшим.

<u>Вопросы для закрепления.</u>

1. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
2. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
3. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значения функции.
4. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.
5. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
6. Общая схема исследования функции при помощи производной.
7. **Подготовить:**

1. Повторить: O_2 - *п. 5.1- 5.9 - стр. 114.*
2. Выполнить: завершить выполнение практического занятия.

Литература:

- основные O_2: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0. - *п. 5.1- 5.9 - стр. 114.*

- дополнительные Электронный ресурс: Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И.Башмаков. – 10-е изд., стер. — М. Издательский центр «Академия», 2015. – 256 с. ISBN 978-5-4468-2339-0.
раздаточный материал.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 28

Тема: «Применение производной к исследованию функций». (2 часа)

Тема 7.1 Производная и её применение.

Цель занятия: формировать умения обучающихся применять полученные знания к вычислению производных, научится исследовать функции на возрастание (убывание), максимум (минимум), наибольшее (наименьшее) значения функции с помощью производной, формировать умения обучающихся исследовать функции по общей схеме и строить их графики. Овладеть учебно-познавательными компетенциями (умение планировать, анализировать, самостоятельно добывать знания) и коммуникативными компетенциями (умение ясно и четко излагать мысли, убеждать, аргументировать, строить доказательства, анализировать, высказывать суждения, передавать рациональную и эмоциональную информацию, устанавливать межличностные связи, согласовывать свои действия с действиями сверстников, работать в коллективе, отстаивать, цивилизованными способами свою точку зрения, слушать и слышать других, организовывать и поддерживать диалог) для владения умениями описания свойств различных процессов и явлений математического характера.

Сформированные способности: Л4, Л5, Л7; М1, М2, М3; П3, П5.

Л 4. Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно - научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

Л 5. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Л 7. Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;

М 1. Умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

М 2. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М 3. Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

П 3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

П 5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

Требования к выполнению практической работы:

1. Сдать теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».
2. Оформить задания в тетради для практических работ.
3. Выполнить задания из учебника совместно с преподавателем.
4. Выполнить индивидуальное задание по варианту в тетради для практических работ.
5. Ответить на контрольные теоретические вопросы.

I. Теоретический срез знаний по теме «Производная и ее применение».

Обучающиеся отвечают на вопросы в письменной (устной) форме.

Вопросы обучающимся:

1. Понятие производной и ее применение. Физический или механический смысл производной.
2. Основные теоремы дифференцирования (теорема суммы, разности, произведения и частного).
3. Таблица производных элементарных функций.
4. Понятие композиции функции. Производная сложной функции.
5. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.
6. Понятие производной второго порядка, производных высшего порядка.
7. Физический (механический) смысл производной второго порядка.
8. Понятие возрастания и убывания функции. Признаки возрастания и убывания функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
9. Понятие максимума и минимума функции. Признаки максимума и минимума функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
10. Понятие выпуклости (вогнутости) функции. Признаки выпуклости (вогнутости) функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
11. Понятие точек перегиба функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.
12. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции. Признаки наибольшего (наименьшего) значения функции. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значения функции.
13. Общая схема исследования функции при помощи производной.

II. Выполнение заданий из учебника совместно с преподавателем.

Выполнить задания из учебника $О_2$ - № 5.113 – 5.115 - а.

III. Индивидуальное задание по вариантам.

Выполнение индивидуального задания «Применение производной к исследованию функций» в форме расчетно-графической работы по вариантам согласно номеру в журнале.

Вариант № 1 | Вариант № 2

1) Найти стационарные (критические) точки функции.

$f(x) = -x^3/3 + x^2/2 + 2x - 3$ | $f(x) = -x^3/3 - x^2/4 + 3x - 2$

2) Найти точки экстремума функции.

$f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^3$; $f(x) = xe^{x^2-3x}$ | $f(x) = 1{,}5x^4 + 3x^3$; $f(x) = x(1/e)^{x^2-x}$

3) Найти экстремумы функции.

1-в) $f(x) = (6-3x)\sqrt{x}$ | 2-в) $f(x) = \dfrac{8+2x}{\sqrt{x}}$ | 3-б) $f(x) = x^2 \cdot e^x$; $y = \dfrac{x^3 - x^2}{e^{-x}}$

4) Найти промежутки убывания функции.

1-в) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ | 2-в) $f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$ | 3-б) $f(x) = \lg \sin x$

5) Найти промежутки возрастания и убывания функции.

1) $f(x) = \dfrac{3x+2}{1-4x}$; $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$ | 2) $f(x) = \dfrac{1+4x}{2x-3}$; $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x}$ | 3-б) $y = \dfrac{2\ln^2 x + 3\ln x}{x}$

5) Постройте график функции.

а) $y = x^3 - 12x + 2$	а) $y = -x^3 + 3x + 1$	а) $y = \cos 2x - 2\cos x$
б) $y = \dfrac{2x^2-4x}{2x^2-4x+3}$	б) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+3}$	б) $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$
в) $y = -x^4 + 2x^3 + 2$	в) $y = x^4 - 2x^3$	в) $y = 10^{\lg\lvert x+1\rvert - 1}$
г) $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$	г) $y=10x^6-12x^5-15x^4+20x^3$	г) $y = 3^{\log_3(x^2-4x+1)}$

Сколько действительных корней имеет уравнение $y = C$?

Вопросы для закрепления.

1. Алгоритм исследования функции при помощи производной на возрастание и убывание.
2. Алгоритм исследования функции при помощи производной на максимум и минимум.
3. Алгоритм исследования функции при помощи производной на наибольшее (наименьшее) значения функции.
4. Алгоритм исследования функции при помощи производной на точки перегиба функции.
5. Алгоритм исследования функции при помощи производной на выпуклость (вогнутость).
6. Общая схема исследования функции при помощи производной.
7. **Подготовить:**

1. Повторить: O_2 - *п. 5.1- 5.11 - стр. 114.*
2. Выполнить: завершить выполнение практического занятия.

Литература:

- основные O_2: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— М.: Просвещение, 2014. — 464 с.: ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-034223-0. - *п. 5.1- 5.11 - стр. 114.*

- дополнительные Электронный ресурс: Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И.Башмаков. – 10-е изд., стер. — М. Издательский центр «Академия», 2015. – 256 с. ISBN 978-5-4468-2339-0.
раздаточный материал.